

Introduction à la Mécanique des Fluides

Principes et fondements de la
modélisation mathématique des
écoulements de fluides visqueux
newtoniens incompressibles

Damien VIOLEAU – EDF R&D / LNHE



Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
Ecole des Ingénieurs de la Ville de Paris



Cours de Mécanique des Fluides



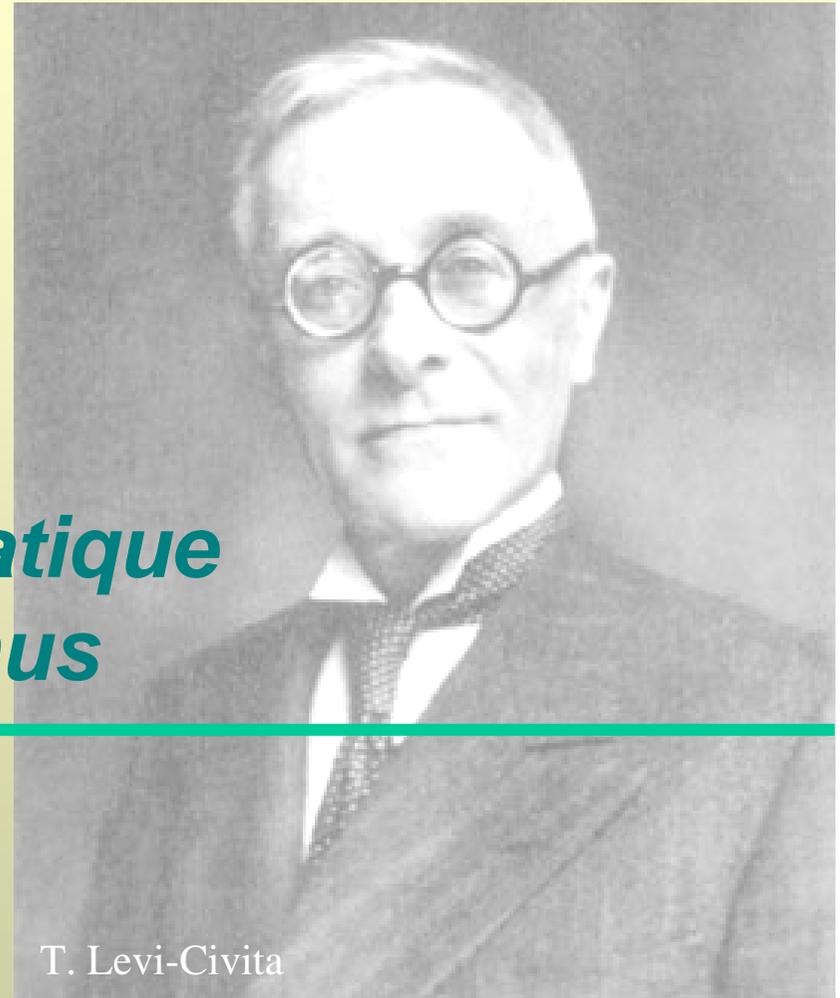
Objectif du cours

- Présenter et expliquer les phénomènes
- Démontrer les équations fondamentales
- Donner des outils simples d'expertise
- Justifier et éclaircir les modèles numériques

Plan sommaire

- Notions de cinématique des milieux continus
- Equations de bilans des milieux continus
- Equations des fluides visqueux newtoniens incompressibles

***Première partie :
Notions de cinématique
des milieux continus***



T. Levi-Civita

Contexte



Problématique

La mécanique des milieux continus a pour objectif de donner des outils mathématiques simples permettant :

- d'estimer les efforts (contraintes)
- de déterminer les déformations

... au sein d'un milieu déformable (béton, métal, sol, fluide, etc.)

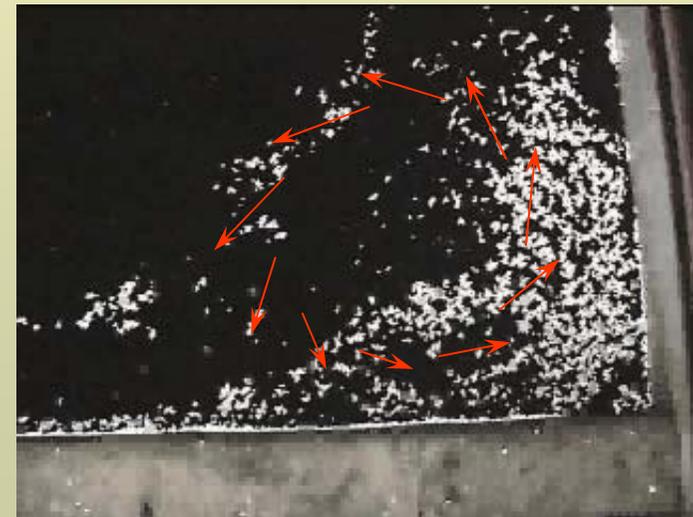
Cas des fluides

Il s'agit de déterminer, pour un écoulement donné :

- en chaque point de coordonnées x, y, z
- à chaque instant t

... les quantités suivantes :

- les 3 composantes de la vitesse
- la pression



Description spatiale

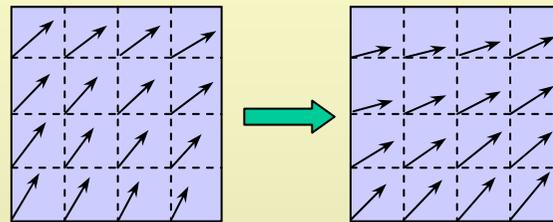


Représentation eulérienne et lagrangienne



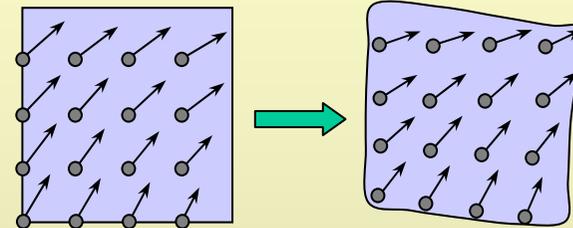
L. Euler

Euler



Points fixes (virtuels)

Lagrange



Particules mobiles (réelles)

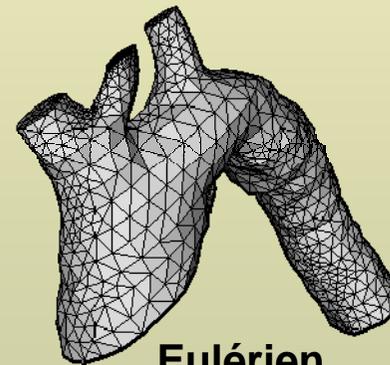


J.-L. Lagrange

Deux approches...

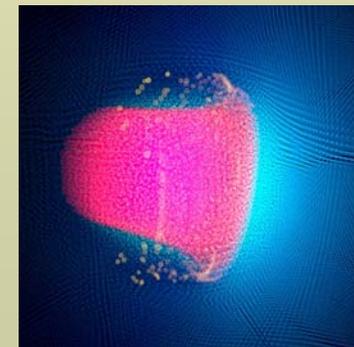
- en théorie équivalentes
- complémentaires.

Dans un logiciel, les deux approches aboutissent à des modélisations différentes et permettent de prédire des phénomènes différents :



Eulérien

Lagrangien



Champs de tenseurs

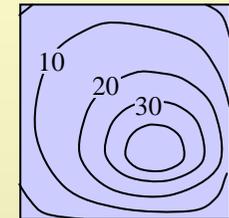
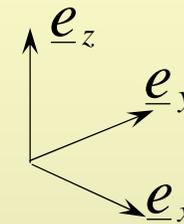


On se donne une base *orthonormée* de vecteurs \underline{e}_i .

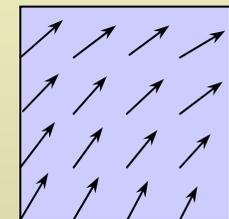
Les coordonnées spatiales (*eulériennes*) d'un point sont notées x_k ($k = 1, 2, 3$) ou x, y, z .

On distingue différents tenseurs :

- Ordre 0 (scalaires) : $A(x_k, t)$
- Ordre 1 (vectoriels) : $\underline{A}(x_k, t) = \sum_{i=1,2,3} A_i(x_k, t) \underline{e}_i$
- Ordre 2 (matriciels) : $\underline{\underline{A}}(x_k, t) = \sum_{i,j=1,2,3} A_{ij}(x_k, t) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$



scalaire



vectoriel

Conventions

- Convention d'Einstein : $A_i \underline{e}_i = \sum_{i=1,2,3} A_i(x_k, t) \underline{e}_i$
- On omet souvent la dépendance explicite en x_i et t
- Symbole de Kronecker : coefficients δ_{ij} de la matrice $\underline{\underline{I}}$

$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

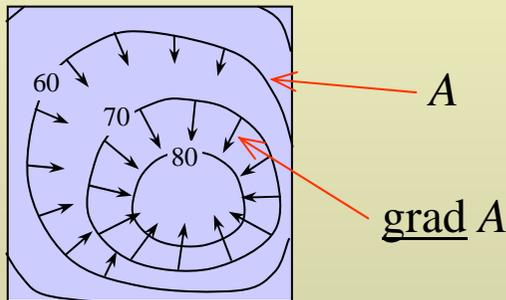
Opérateurs différentiels (1)



Opérateurs « gradient »

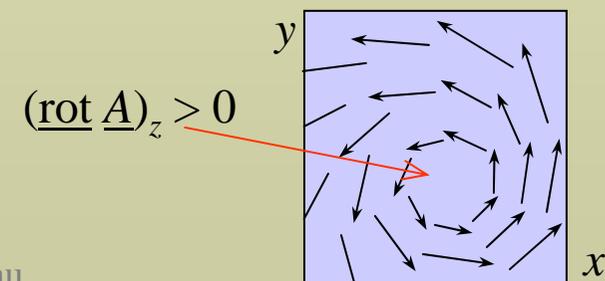
- Vectoriel : $\underline{\text{grad}}A = \frac{\partial A}{\partial x_i} \underline{e}_i = \left(\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z} \right)$

- Tensoriel : $\underline{\underline{\text{grad}}}A = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}$



Opérateur « rotationnel »

$$\underline{\text{rot}}A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

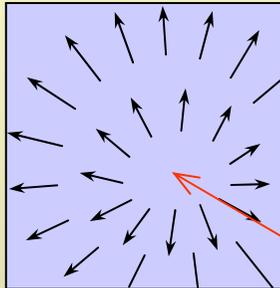


Opérateurs différentiels (2)



Opérateurs « divergence »

- Scalaire : $\text{div } \underline{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$



$\text{div } \underline{A} > 0$

- Vectorielle : $\underline{\text{div}} \underline{A} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$

Opérateurs « Laplacien »

- Scalaire : $\Delta A = \text{div } \underline{\text{grad}} A = \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_i}$

- Vectoriel : $\Delta \underline{A} = \underline{\text{div}} \underline{\text{grad}} \underline{A} = \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_i \partial x_i} \underline{e}_j$

Opérations élémentaires

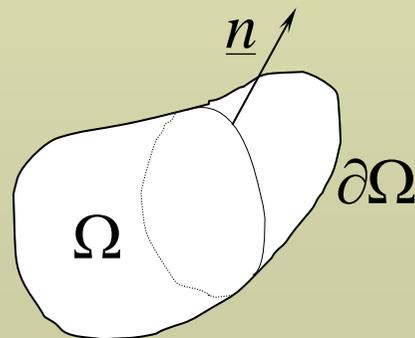


Opérations entre tenseurs

- Produit scalaire : $\underline{A} \cdot \underline{B} = A_i B_i$
- Transposée d'une matrice : $(A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)^T = A_{ji} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$
- Produits matrice-vecteur : $\underline{A} \cdot \underline{B} = A_{ij} B_j \underline{e}_i$ $\underline{B} \cdot \underline{A} = B_i A_{ij} \underline{e}_j = \underline{A}^T \cdot \underline{B}$
- Produit de deux matrices : $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = A_{ik} B_{kj} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$
- Trace d'une matrice : $\text{tr } \underline{\underline{A}} = A_{ii}$
- Double produit de deux matrices : $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = A_{ij} B_{ji} = \text{tr}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})$

Théorème de Green-Ostrogradski

- Ω : volume de contrôle
- \underline{n} : normale extérieure unitaire au bord $\partial\Omega$



$$\int_{\Omega} \text{div } \underline{A} \, d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \underline{A} \cdot \underline{n} \, d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} \text{div } \underline{\underline{A}} \, d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{n} \, d\Gamma$$

Champ de vitesse

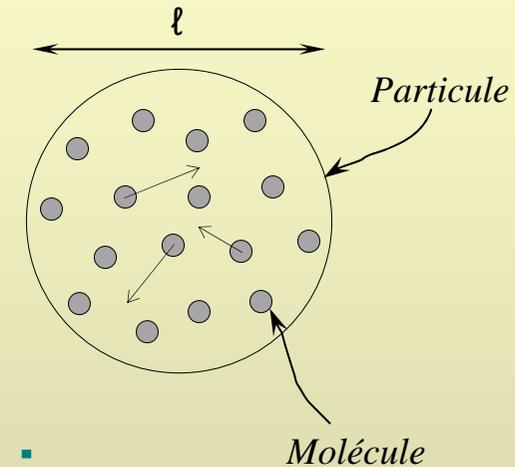


Notion de « particule » d'un milieu continu

- Ensemble de molécules suffisamment grand pour définir une vitesse statistique :

$$\underline{v}(\ell) = \frac{1}{N(\ell)} \sum_{k=1}^{N(\ell)} \underline{v}_k$$

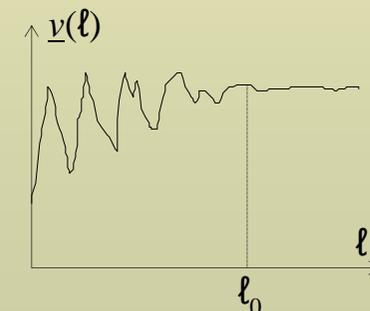
- ... mais suffisamment petit pour demeurer microscopique ! (Typiquement, $\ell \sim 10^{-5}$ m)



L'approche *statistique* est nécessaire :

- Pour utiliser correctement la notion de vitesse à l'échelle moléculaire ;
- Pour obtenir un champ de vitesse *régulier* (continu et dérivable) $\underline{u}(x_i, t) \equiv \underline{v}(\ell_0)$ (ms^{-1})

→ On appelle quantité de mouvement la grandeur $\rho \underline{u}$ (\underline{u} est donc la quantité de mouvement par unité de masse)



Autres champs



Champ de densité

- Définition : $\rho(x_i, t) \equiv \rho(\ell_0) = \frac{1}{V(\ell_0)} \sum_{k=1}^{N(\ell_0)} m_k$

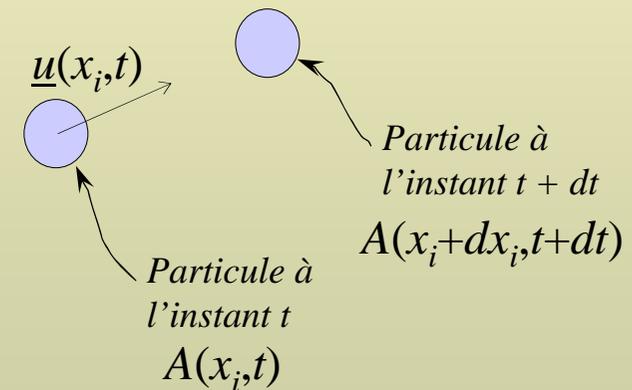
- Comme la vitesse, c'est un champ régulier (kg.m^{-3})

Dérivée matérielle (ou lagrangienne) d'un champ

- Taux de variation d'un champ en *suivant* une particule :

$$dA = \frac{\partial A}{\partial t} dt + \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz$$

$$\underbrace{\frac{dA}{dt}}_{\text{dérivée lagrangienne}} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_i} u_i = \underbrace{\frac{\partial A}{\partial t}}_{\text{dérivée eulérienne}} + \underbrace{\text{grad}A \cdot \underline{u}}_{\text{transport (convection)}}$$



→ Accélération d'une particule : $\frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underbrace{\text{grad} \underline{u} \cdot \underline{u}}_{\text{inertie}}$

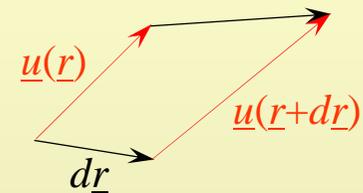
Déformation d'un milieu (1)



Tenseur taux de déformation

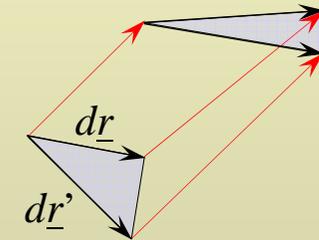
- Dérivée lagrangienne d'un petit vecteur *matériel* :

$$\frac{d(d\underline{r})}{dt} = \frac{d}{dt}(\underline{r}' - \underline{r}) = \underline{u}(\underline{r} + d\underline{r}) - \underline{u}(\underline{r}) = \underline{\underline{\text{gradu}}} \cdot d\underline{r}$$



- Dérivée d'un produit scalaire de vecteurs élémentaires :

$$\begin{aligned} \frac{d(d\underline{r} \cdot d\underline{r}')}{dt} &= \frac{d(d\underline{r})}{dt} \cdot d\underline{r}' + d\underline{r} \cdot \frac{d(d\underline{r}')}{dt} \\ &= (\underline{\underline{\text{gradu}}} \cdot d\underline{r}) \cdot d\underline{r}' + d\underline{r} \cdot \underline{\underline{\text{gradu}}} \cdot d\underline{r}' \\ &= d\underline{r} \cdot (\underline{\underline{\text{gradu}}})^T \cdot d\underline{r}' + d\underline{r} \cdot \underline{\underline{\text{gradu}}} \cdot d\underline{r}' \end{aligned}$$



$$\frac{d(d\underline{r} \cdot d\underline{r}')}{dt} = 2d\underline{r} \cdot \underline{\underline{s}} \cdot d\underline{r}'$$

→ On introduit le tenseur *taux de déformation* :

$$\underline{\underline{s}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\text{gradu}}} + (\underline{\underline{\text{gradu}}})^T \right] \quad \text{ou} \quad s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = s_{ji}$$

Déformation d'un milieu (2)



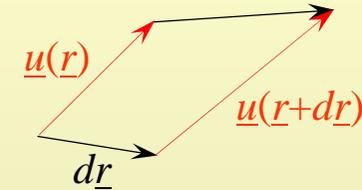
Interprétation du taux de déformation

- Taux de **dilatation** :

$$\frac{d(\underline{dr} \cdot \underline{dr})}{dt} = 2\underline{dr} \cdot \underline{s} \cdot \underline{dr}$$

$$2 \frac{d(|\underline{dr}|)}{dt} |\underline{dr}| = 2\underline{dr} \cdot \underline{s} \cdot \underline{dr}$$

$$\frac{1}{|\underline{dr}|} \frac{d(|\underline{dr}|)}{dt} = \underline{s} \cdot \frac{\underline{dr}}{|\underline{dr}|}$$

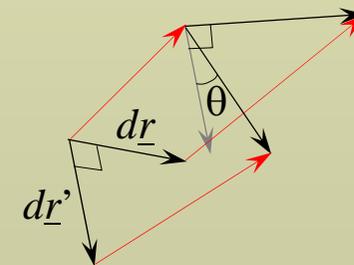


- ➔ Il s'agit de la rapidité avec laquelle le matériau se *dilate* dans la direction \underline{dr}

- Taux de **distorsion** : $\underline{dr} \cdot \underline{dr}' = |\underline{dr}| |\underline{dr}'| \sin \theta \approx |\underline{dr}| |\underline{dr}'| \theta$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2 \frac{\underline{dr}}{|\underline{dr}|} \cdot \underline{s} \cdot \frac{\underline{dr}'}{|\underline{dr}'|}$$

- ➔ Il s'agit de la rapidité avec laquelle le matériau se *distord* dans le plan contenant \underline{dr} et \underline{dr}'



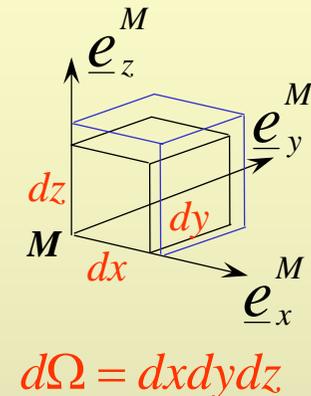
Dilatation



Taux de contraction / dilatation

Dans la base de diagonalisation de \underline{s} :

$$\begin{aligned}\frac{d(d\Omega)}{dt} &= \frac{d(dx)}{dt} dydz + \frac{d(dy)}{dt} dxdz + \frac{d(dz)}{dt} dxdy \\ \Rightarrow \frac{1}{d\Omega} \frac{d(d\Omega)}{dt} &= \frac{1}{dx} \frac{d(dx)}{dt} + \frac{1}{dy} \frac{d(dy)}{dt} + \frac{1}{dz} \frac{d(dz)}{dt} \\ &= \underline{e}_x \cdot \underline{s} \cdot \underline{e}_x + \underline{e}_y \cdot \underline{s} \cdot \underline{e}_y + \underline{e}_z \cdot \underline{s} \cdot \underline{e}_z \\ &= s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = \text{tr } \underline{s} \\ \Rightarrow \frac{1}{d\Omega} \frac{d(d\Omega)}{dt} &= \text{tr } \underline{s} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \underline{u} \quad \text{représente donc le} \\ & \quad \text{taux de dilatation.}\end{aligned}$$



➔ Exemple : le taux de dilatation de l'Univers en expansion est nommé par les cosmologues la *constante de Hubble* $H_0 \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$

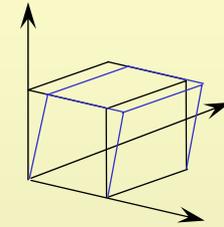
Cisaillement



Taux de déformation scalaire

Par opposition, une mesure de la déformation du matériau, même en l'absence de dilatation / contraction, est donnée par le *taux de déformation scalaire* :

$$s = \sqrt{2s_{ij}s_{ij}} = \sqrt{2\underline{s} : \underline{s}}$$



$$d\Omega = cte$$

$$\text{tr } \underline{s} = 0$$

$$s \neq 0$$

Invariants de déformation

Un tenseur diagonalisable possède 3 invariants (indépendants de la base), par exemple ses valeurs propres, ou encore les quantités $\text{tr } \underline{s}^p$, $p = 1, 2, 3$:

$$\underline{s}^3 - (\text{tr } \underline{s})\underline{s}^2 + \frac{1}{2}[\text{tr } \underline{s}^2 - (\text{tr } \underline{s})^2]\underline{s} - (\det \underline{s})\underline{I} = 0 \quad (\text{Cayley-Hamilton})$$

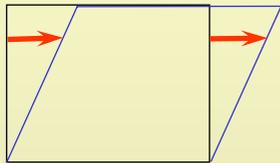
$$\text{tr } \underline{s} = \text{div } \underline{u} \quad \text{tr } \underline{s}^2 = s_{ij}s_{ij} = \frac{s^2}{2} \quad \text{tr } \underline{s}^3 = s_{ij}s_{jk}s_{ki}$$

Exemple : cisaillement constant

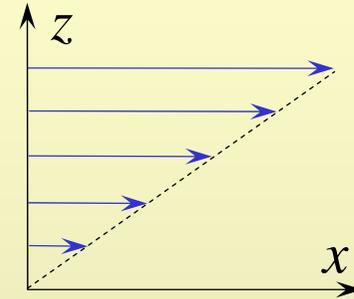


Glissement linéaire à volume constant

On se donne une échelle de temps τ



$$\underline{u} = u(z)\underline{e}_x = \frac{z}{\tau}\underline{e}_x$$



$$\underline{\text{grad}}\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\tau \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{s} = \frac{1}{2\tau} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s = \sqrt{2(s_{xz}^2 + s_{zx}^2)} = 2|s_{xz}| = \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| = \frac{1}{\tau}$$

→ D'une manière générale, le taux de déformation scalaire est l'inverse du *temps caractéristique* de déformation du matériau : $\tau \sim \frac{1}{s}$

Vorticité



Tenseur taux de rotation ou vorticité

Partie antisymétrique du gradient des vitesses :

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\text{gradu}}} - (\underline{\underline{\text{gradu}}})^T \right]$$

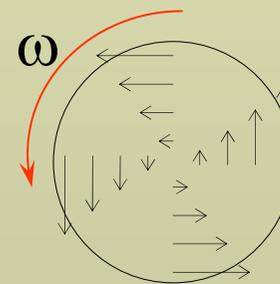
$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -(\underline{\text{rotu}})_z & (\underline{\text{rotu}})_y \\ (\underline{\text{rotu}})_z & 0 & -(\underline{\text{rotu}})_x \\ -(\underline{\text{rotu}})_y & (\underline{\text{rotu}})_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{gradu}}} = \underline{\underline{s}} + \underline{\underline{\omega}}$$

Déformation
pure

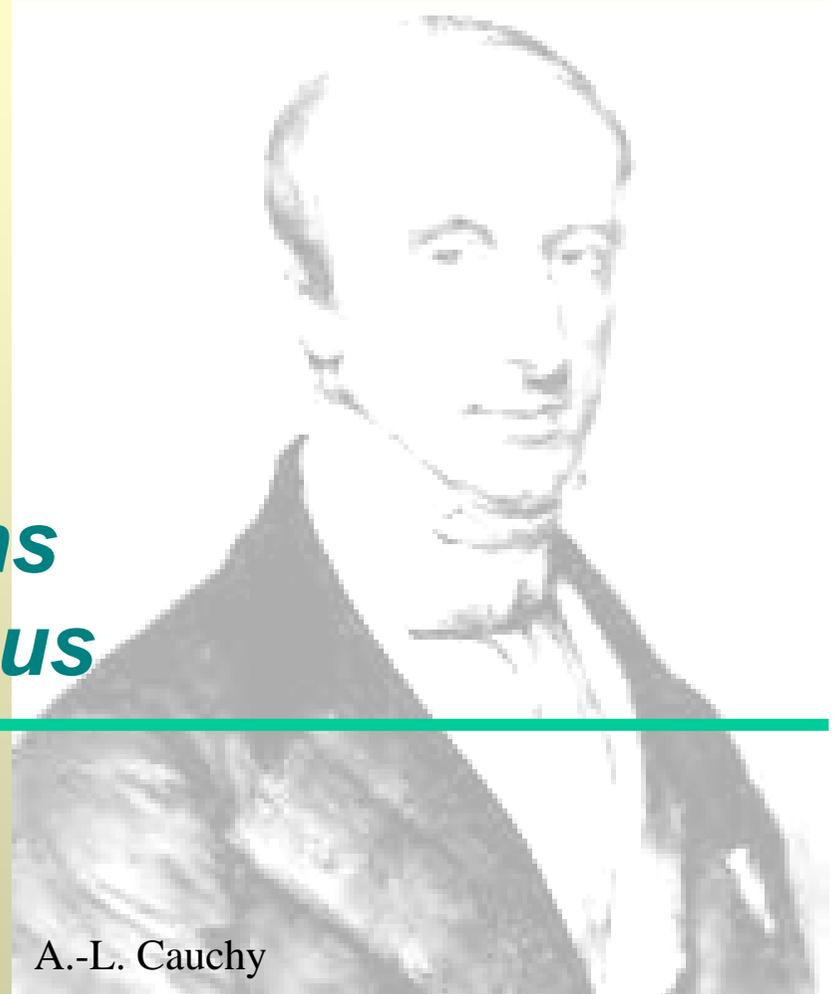
Rotation
pure



$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\omega}} = \omega (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x)$$

***Deuxième partie :
Equations de bilans
des milieux continus***



A.-L. Cauchy

Bilans



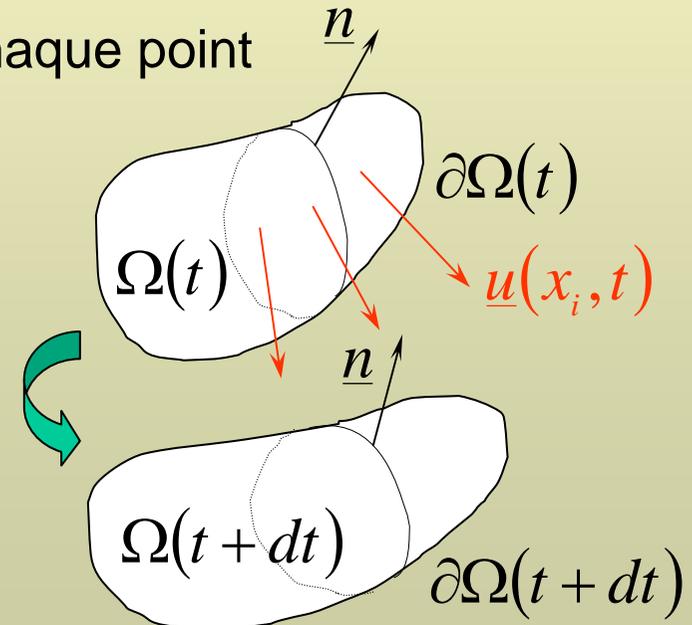
Bilan d'un champ sur un volume *matériel*

On considère un volume Ω constitué d'un nombre *fixé* de particules,
Et on note \underline{n} le vecteur normal unitaire extérieur à sa frontière.

La variation (*lagrangienne*) de l'intégrale d'un champ sur ce volume est due :

- à la variation intrinsèque du champ en chaque point
- au mouvement du volume de contrôle

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} A d\Omega &= \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega}_{\text{variation locale}} + \underbrace{\oint_{\partial\Omega} A \underline{u} \cdot \underline{n} d\Gamma}_{\text{flux à travers les bords}} \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \text{div}(A \underline{u}) \right] d\Omega \end{aligned}$$



Équation de continuité (1)



Cas général

On dresse un bilan de densité ($A = \rho$)

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\Omega} \rho d\Omega}_{=M} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) \right] d\Omega$$

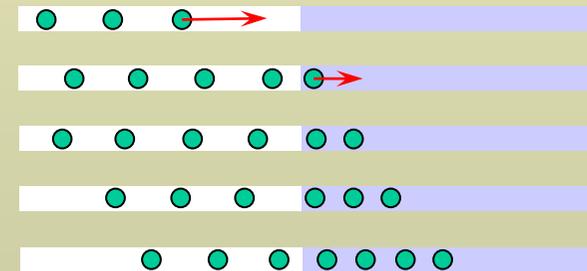
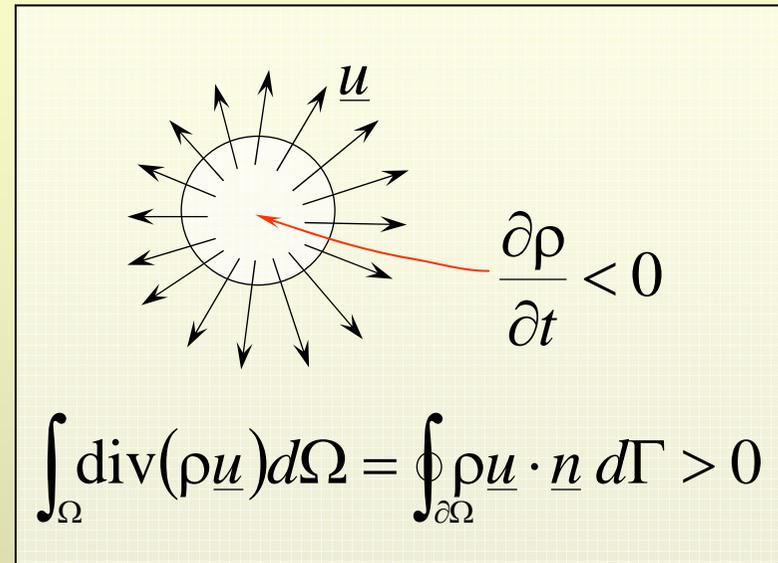
La conservation de la masse M contenue dans Ω donne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

Illustration monodimensionnelle

Modèle de l'autoroute : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial \rho u}{\partial x}$

Conclusion : un ralentissement crée un bouchon



Zone de ralentissement

Équation de continuité (2)



Autre forme de l'équation générale

En séparant le terme sous le signe divergence :

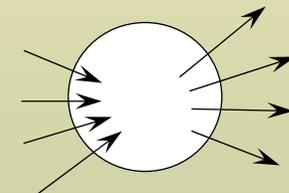
$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad \text{div}(\rho \underline{u}) = \rho \text{div} \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \rho$$

... l'équation de continuité s'écrit encore :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\text{div} \underline{u} \quad \text{à rapprocher de} \quad \frac{1}{d\Omega} \frac{d(d\Omega)}{dt} = \text{div} \underline{u}$$

Cas incompressible ($\rho = \text{cte}$) :

$$\text{div} \underline{u} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



→ On se ramène dans ce cas à la conservation du *volume*.

Remarque : un fluide n'est jamais vraiment incompressible.

Il s'agit en réalité d'une propriété d'un *écoulement* donné.

Retour sur les bilans



Bilan *massique* sur un volume matériel

Cas où $A = \rho B$ (B représente la densité de A par unité de masse) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho B d\Omega &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho B}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho B \underline{u}) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\rho \frac{\partial B}{\partial t} + \underbrace{B \frac{\partial \rho}{\partial t} + B \operatorname{div}(\rho \underline{u})}_{=0 \text{ (continuité)}} + \rho \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} B \right] d\Omega\end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée lagrangienne et l'intégrale commutent :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho B d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{dB}{dt} d\Omega$$

... même si ρ varie, mais uniquement si Ω est un volume *matériel* !

→ En particulier, pour la densité ($B = 1$): $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0$

Flux d'une quantité physique



Bilan massique d'une quantité physique B

L'intégrale d'un champ B varie à cause d'un flux (sortant) \underline{q}^B de cette quantité à travers les bords, dû à différentes raisons physiques :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho B d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} \underline{q}^B \cdot \underline{n} d\Gamma$$

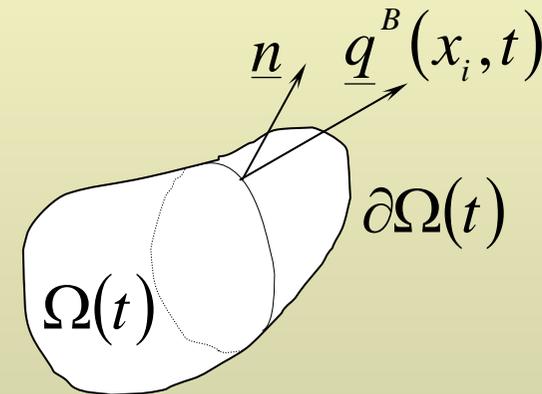
$$\int_{\Omega} \rho \frac{dB}{dt} d\Omega = - \int_{\Omega} \text{div} \underline{q}^B d\Omega$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \underline{\text{grad}} B \cdot \underline{u} = - \frac{1}{\rho} \text{div} \underline{q}^B$$

ou encore :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x_i} u_i = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i^B}{\partial x_i}$$

➔ Pour la densité ($B = 1$) : $\underline{q}^B = \underline{0}$ (conservativité de la masse)



Exemple : traceur passif



Equation de transport d'une substance C

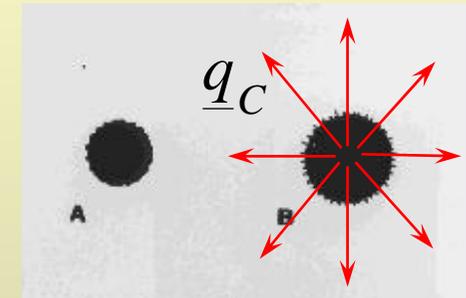
Bilan massique de la quantité C (concentration, par exemple)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \underline{\text{grad}}C \cdot \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \text{div } \underline{q}^c$$

Il est nécessaire de proposer *un modèle* pour le flux :

$$\frac{1}{\rho} \underline{q}_i^c = \frac{1}{\rho} \cancel{\underline{q}_i^{c,0}} - K_c \frac{\partial C}{\partial x_i} + \underbrace{\dots}_{\text{termes d'ordres supérieurs à 1}}$$

ou encore : $\frac{1}{\rho} \underline{q}^c = -K_c \underline{\text{grad}}C$



Enfinement : $\frac{\partial C}{\partial t} + \underline{\text{grad}}C \cdot \underline{u} = \text{div}(K_c \underline{\text{grad}}C) + S_c$

- K_C (m^2s^{-1}) est le coefficient de diffusion du traceur (*positif*)
- Des termes-source S_C peuvent apparaître (réactions chimiques, etc.)
- ➔ Si C ne dépend pas de \underline{u} , l'équation est *linéaire* en C ! (si S_C l'est...)

Convection et diffusion

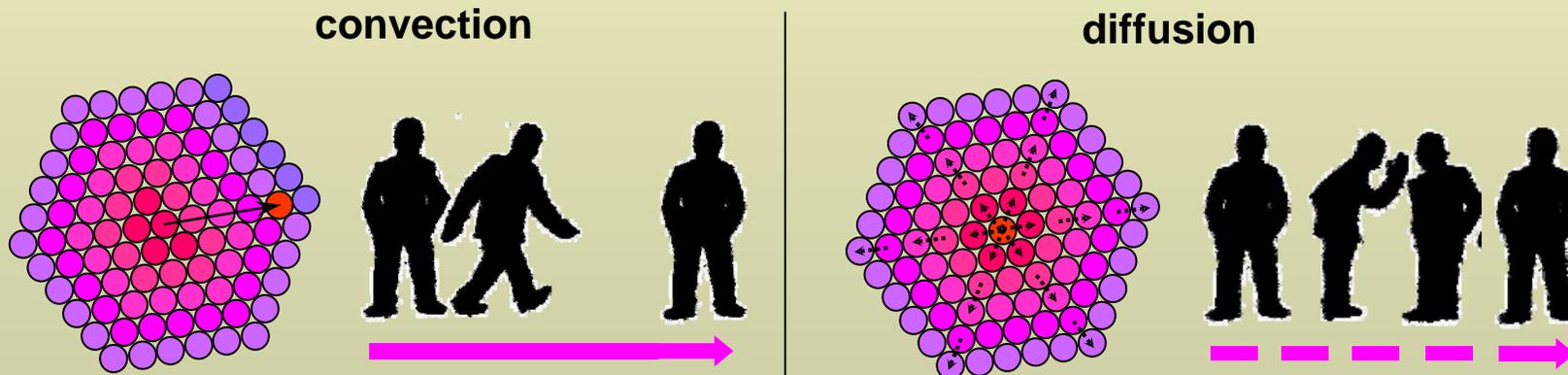


Modes de transport de la quantité C

Il y a deux manières de communiquer une information dans un milieu continu :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \underbrace{\text{grad}C \cdot \underline{u}}_{\text{Convection}} = \underbrace{\text{div}(K_c \text{grad}C)}_{\text{Diffusion}} + S_c$$

- La convection (transport par la matière en mouvement)
- La diffusion (passage de proche en proche par « contagion »)



→ Le phénomène de diffusion *homogénéise* un champ au cours du temps (phénomène *irréversible* !)

Contraintes dans un milieu continu



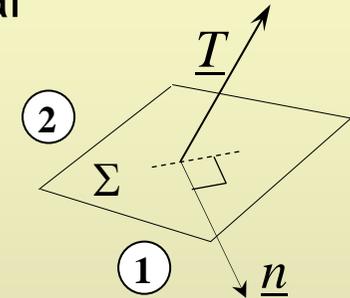
Efforts exercés sur une surface élémentaire

On considère une surface élémentaire Σ orientée par le vecteur \underline{n} .

La contrainte \underline{T} exercée par le milieu ① sur le milieu ② par unité de surface sur Σ vérifie la loi de l'action – réaction :

$$\underline{T}(\underline{n}) = -\underline{T}(-\underline{n})$$

① → ② ② → ①

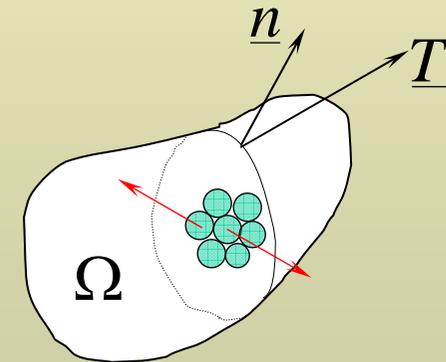


Efforts exercés sur un volume

Les efforts intérieurs s'annulent mutuellement :

$$\underline{F} = \int_{\Omega} \underline{f} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \underline{T} d\Gamma \quad \Rightarrow \quad \underline{f} = \text{div} \underline{\sigma}$$

$$\Rightarrow \underline{F} = \oint_{\partial\Omega} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} d\Gamma$$



→ Conclusion : en chaque point de l'espace, il existe un tenseur $\underline{\sigma}$ dit « tenseur des contraintes » tel que $\underline{T}(\underline{n}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$

Tenseur des contraintes



Pressions / tractions et cisaillements

La contrainte \underline{T} exercée par le milieu ① sur le milieu ② par unité de surface sur Σ possède :

- une composante normale p (pression / traction)
- une composante tangentielle τ (cisaillement)

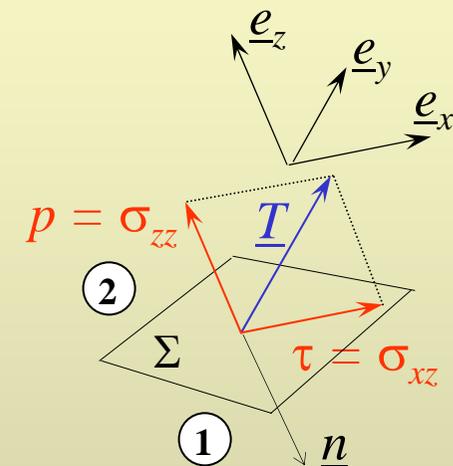
Tenseur des contraintes de Cauchy

Nous avons montré les résultats suivants :

Il existe un tenseur du second ordre $\underline{\underline{\sigma}}$ tel que :

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \quad \text{ou} \quad T_i = \sigma_{ij} n_j$$

- Les termes diagonaux σ_{ii} représentent les pressions / tractions
- Par convention, les σ_{ii} sont négatifs s'il s'agit d'une pression
- Les termes extra-diagonaux σ_{ij} ($i \neq j$) représentent les cisaillements
- $\underline{\underline{\sigma}}$ se mesure en pascals (force / surface)



Équation de quantité de mouvement



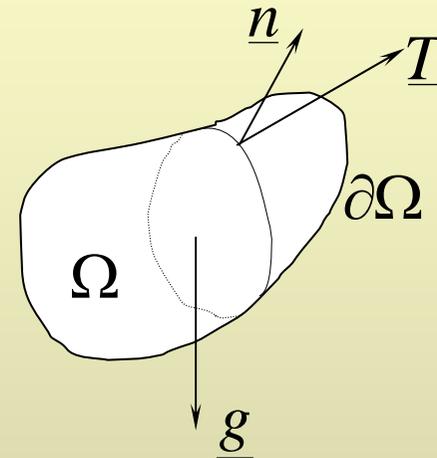
Principe fondamental de la dynamique

C'est un bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\Omega} \rho \underline{u} d\Omega}_{\text{Quantité de mouvement}} = \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \underline{T} d\Gamma}_{\text{Contraintes}} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \underline{g} d\Omega}_{\text{Champs extérieurs}}$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d\underline{u}}{dt} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \underline{g} d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} \cdot \underline{u} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \underline{g} d\Omega$$



Equations de Cauchy :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u} \cdot \underline{u} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{g} \quad \text{ou} \quad \forall i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i$$

Symétrie des contraintes



Calcul du moment des forces

Densité de force : $\underline{F} = \oint_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} \, d\Omega$

$$\Rightarrow \underline{M} = \oint_{\partial\Omega} \underline{r} \times (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \, d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{r} \times \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} \, d\Omega$$

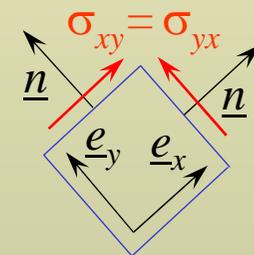
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$M_i = \int_{\Omega} \left(x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} - x_k \frac{\partial \sigma_{jl}}{\partial x_l} \right) d\Omega$$

$$= \oint_{\partial\Omega} (x_j \sigma_{kl} - x_k \sigma_{jl}) n_l \, d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_l} \sigma_{kl} - \frac{\partial x_k}{\partial x_l} \sigma_{jl} \right) d\Omega$$

$$= \oint_{\partial\Omega} [x_j (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})_k - x_k (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})_j] \, d\Gamma - \int_{\Omega} (\delta_{jl} \sigma_{kl} - \delta_{kl} \sigma_{jl}) \, d\Omega$$

$$= \oint_{\partial\Omega} \underline{r} \times (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \, d\Gamma - \int_{\Omega} (\sigma_{kj} - \sigma_{jk}) \, d\Omega \quad \Rightarrow \sigma_{jk} = \sigma_{kj}$$



→ Conclusion : $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique.

Résumé des équations obtenues



Equation de continuité (milieu *incompressible*)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Equations de quantité de mouvement (z vertical)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - g$$

... soit 4 équations pour 9 inconnues (u, v, w et les 6 σ_{ij}) !

➔ Il est donc nécessaire de *fermer* le modèle.



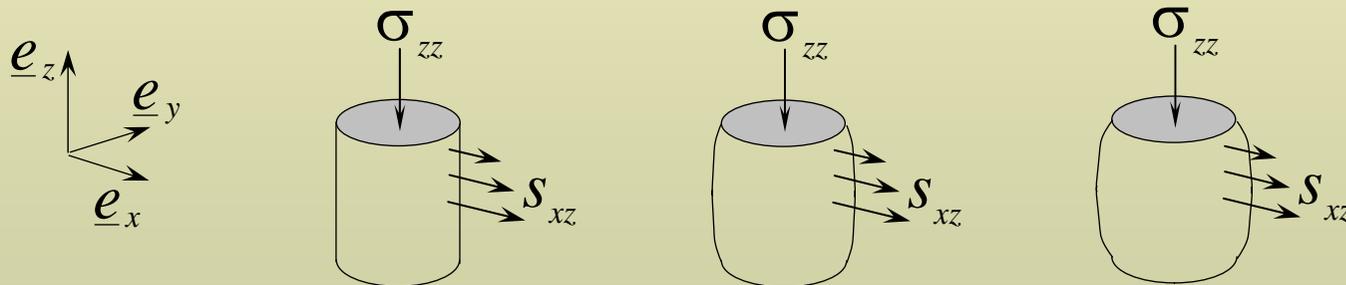
A. L. Cauchy

Loi de comportement



Idée maîtresse

- On ne connaît pas encore les contraintes σ_{ij} , car elles dépendent du *matériau* considéré.
- Un matériau est caractérisé par une *loi de comportement*, reliant les contraintes aux *déformations* : $\underline{\underline{\sigma}} = f(\underline{\underline{s}})$
- La loi de comportement dépendant de la structure moléculaire du matériau, elle sera donnée par la *thermodynamique*.



**3 échantillons de matériaux différents,
réagissant différemment à une même sollicitation**

***Troisième partie :
Les équations de
Navier-Stokes***



C.-L.-M. Navier

Bilan d'énergie



Energie cinétique

On multiplie l'équation de Cauchy par \underline{u} :

$$\frac{d\underline{u}}{dt} \cdot \underline{u} = \frac{1}{\rho} (\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{u} + \underline{g} \cdot \underline{u} \quad (\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{u} = \text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) - \underbrace{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{u}}_{= \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{s}}}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{d}{dt} \frac{u^2}{2} = \text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \underline{u}) + \rho \underline{g} \cdot \underline{u} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{s}}$$

$$= \sigma_{ij} s_{ij}$$

... puis on intègre sur un volume matériel :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \underbrace{\rho \frac{u^2}{2}}_{= \delta E_c} d\Omega = \underbrace{\oint_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) \cdot \underline{n} d\Gamma}_{= \underline{T} \cdot \underline{u}} + \int_{\Omega} \rho \underline{g} \cdot \underline{u} d\Omega - \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{s}} d\Omega}_{\text{puissance dissipée}}$$

puissance des forces extérieures

...ou encore $\dot{E}_c = P_{ext} - e\Omega$

$e = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{s}}$ est la puissance dissipée par unité de volume et de temps.

Résumé sur les flux

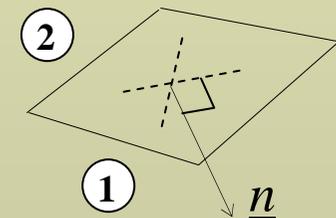


Analogie des lois de bilans

Toutes les équations vues présentent des formes semblables :

équation	flux	source
$\frac{\partial C}{\partial t} + \underline{\text{grad}}C \cdot \underline{u} = \text{div}(K_c \underline{\text{grad}}C) + S_c$	$\underline{q}^C = -\rho K_c \underline{\text{grad}}C$	S_c
$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{grad}}\underline{u} \cdot \underline{u} = \frac{1}{\rho} \underline{\text{div}}\underline{\sigma}$	$\underline{\underline{q}}^u = -\underline{\underline{\sigma}}$	$\underline{0}$
$\frac{\partial E_c}{\partial t} + \underline{\text{grad}}E_c \cdot \underline{u} = \frac{1}{\rho} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) - e$	$\underline{q}^{E_c} = -\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}$	$-e$

- La quantité $-T_i = -\sigma_{ij}n_j$ représente le flux de u_i passant de ① vers ② à travers une facette orientée par n_i , par unité de temps, de surface et de masse.
- A un vecteur correspond un flux *tensoriel*



Thermodynamique



Premier principe

Il donne la variation d'énergie totale dans un milieu :

$$dE_c + dE_{\text{int}} = dE = \delta W_{\text{ext}} + \delta Q$$

$$\dot{E}_c + \dot{E}_{\text{int}} = P_{\text{ext}} + \overset{\circ}{Q}$$

$$-\left(\dot{E}_c \quad \quad \quad = P_{\text{ext}} - e\Omega \right)$$

$$\dot{E}_{\text{int}} = \sigma_{ij} s_{ij} \Omega + \overset{\circ}{Q}$$

... l'énergie cinétique dissipée est convertie en *énergie interne*.

Puissance dissipée par une déformation virtuelle

On se limite aux transformations sans échange de chaleur (par exemple à T constant), puis on fait varier la déformation. On obtient la puissance virtuelle associée à cette déformation :

$$\dot{e}_{\text{int}} = \dot{E}_{\text{int}} / \Omega \quad d\dot{e}_{\text{int}} \Big|_T = \sigma_{ij} ds_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \dot{e}_{\text{int}}}{\partial s_{ij}} \Big|_T$$

Tenseur des contraintes d'un fluide



Détermination de σ_{ij}

Pour un fluide, \dot{e}_{int} ne peut dépendre que des invariants de s_{ij} :

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\text{int}} &= f(\underline{s}) = f(\text{tr } \underline{s}, \text{tr } \underline{s}^2, \text{tr } \underline{s}^3) \\ &= \alpha \text{tr } \underline{s} + \mu \text{tr } \underline{s}^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{tr } \underline{s})^2 + \dots\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = \alpha \delta_{ij} + 2\mu s_{ij} + \lambda (\text{tr } \underline{s}) \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} s_{ij} = \alpha \delta_{ij} s_{ij} + 2\mu s_{ij} s_{ij} + \lambda (\text{tr } \underline{s}) \delta_{ij} s_{ij}$$

$$= \alpha \text{tr } \underline{s} + \mu s^2 + \lambda (\text{tr } \underline{s})^2 \quad \Rightarrow \quad e = \mu s^2$$

Rôle de la grandeur α (fluide incompressible)

Pour une petite déformation : $e \approx \alpha \text{tr } \underline{s}$

$$\text{tr } \underline{s} = \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt}$$

$$\dot{E}_{\text{int}} = \Omega e + \overset{\circ}{Q}$$

$$dE_{\text{int}} = \alpha d\Omega + \delta Q$$

$$= \Omega \alpha \text{tr } \underline{s} + \overset{\circ}{Q}$$

$$\downarrow$$
$$-p$$

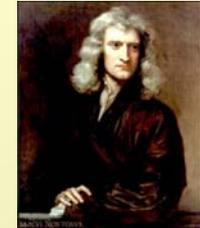
$$\Rightarrow \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu s_{ij}$$

Pression et viscosité



Viscosité

- La quantité μ est appelée *viscosité dynamique*
- Elle est caractéristique d'un fluide donné et dépend de la température ; elle se mesure en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$
- Les contraintes visqueuses sont les seules *dissipatives*, et $\mu > 0$
- On appelle fluide *newtonien* un fluide de viscosité constante (seul cas considéré dans ce cours)



I. Newton

Pression

- La pression p se mesure en Pa, comme les contraintes
- Elle existe parce qu'un fluide est toujours légèrement compressible : $\rho \approx cte$
- Elle est extrêmement sensible à de très légères variations de densité. Il s'agit donc d'une nouvelle inconnue : $p = p(x_k, t)$

Exemples de comportements

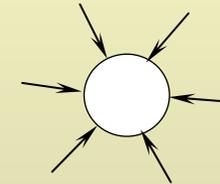


Résumé de la loi de comportement d'un fluide

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underbrace{\mu(\underline{\text{grad}}\underline{u} + {}^T\underline{\text{grad}}\underline{u})}_{= \underline{\underline{\tau}} \text{ (cisaillement)}}$$

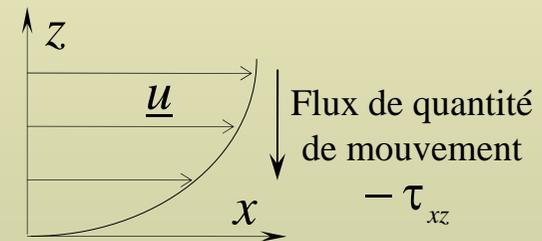
Quelques exemples simples

- Cas d'un fluide au repos ($s_{ij} = 0$) : $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$
... Les contraintes y sont *isotropes*.



- Cas d'un écoulement simplement cisailé :

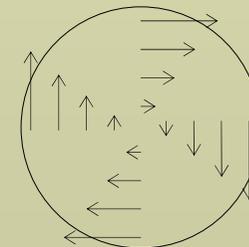
$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$



- Cas d'un écoulement purement rotationnel :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{0}}$$

... Le frottement y est nul.



Équations de Navier-Stokes (1)



Introduction de la loi dans les équations de Cauchy

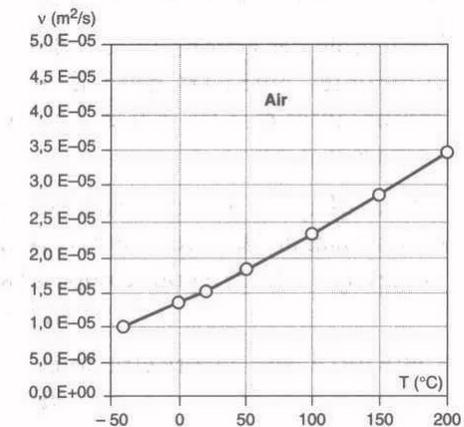
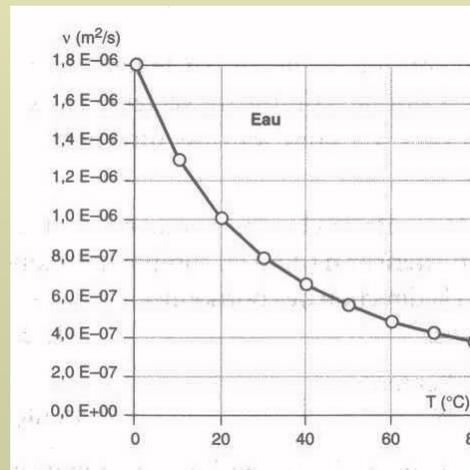
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{grad}} \underline{u} \cdot \underline{u} &= \frac{1}{\rho} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{g} \\ \underline{\underline{\sigma}} &= -p \underline{I} + 2\mu \underline{s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\text{grad}} \underline{u} \cdot \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{g}$$

ou $\forall i, \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + g_i$

→ $\nu = \mu / \rho$ est la *viscosité cinématique* du fluide.

... à 20° C :

- Eau : $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
- Air : $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$
- Mercure : $\nu = 12 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$



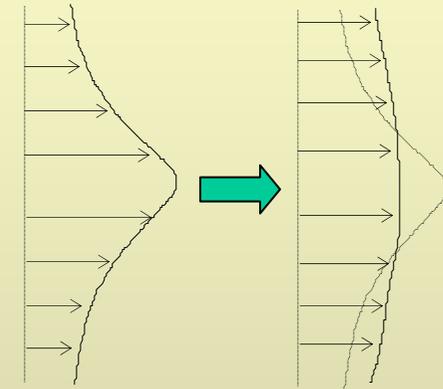
Analyse physique des termes



Diffusion des vitesses

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \dots = \underbrace{\text{div}(K_c \text{grad}C)}_{\equiv K_c \Delta C} + \dots \iff \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \dots = \dots + \nu \Delta \underline{u}$$

- Le terme visqueux *homogénéise* le champ de vitesses en *diffusant* la quantité de mouvement
- ν joue le rôle d'un coefficient de diffusion des vitesses
- Il s'agit bien d'une conséquence du *frottement*
- Le changement $t \rightarrow -t$ affecte le terme visqueux seul (*irréversibilité*)



Convection des vitesses

- Le terme de convection est *non-linéaire* : $\underline{\text{grad}} \underline{u} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j \underline{e}_i$
(transport de la vitesse par la vitesse)
- Dans la suite, il sera important de *comparer* les ordres de grandeur de ces deux termes

Équations de Navier-Stokes (2)



Equation de continuité (fluide *incompressible*)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Equations de quantité de mouvement (z vertical)



C. Navier (1822)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$



G. Stokes (1845)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g$$

... soit 4 équations pour 4 inconnues (u , v , w et p)

→ Le modèle est fermé.

Conditions aux limites



Sur la frontière de l'ensemble du fluide :

- Sur les parois solides imperméables, la vitesse du fluide est celle de la paroi :

$$\underline{u} = \underline{U}_{paroi}$$

- Aux interfaces entre deux fluides, il y a continuité de la contrainte :

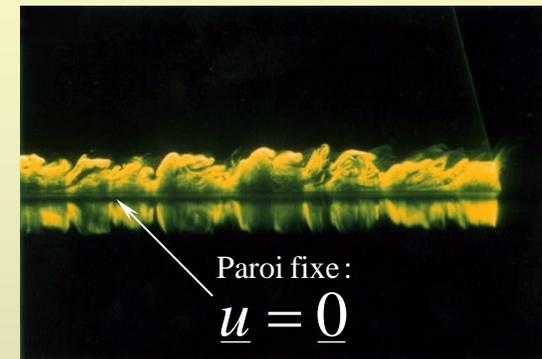
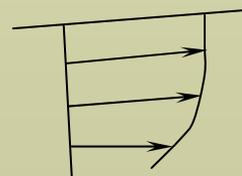
$$[\sigma_{ij}n_j] = 0$$

- En particulier, sur une surface libre, la pression est égale à la pression atmosphérique :

$$p_{surface} = p_{atmosphérique}$$

- ... et la contrainte de cisaillement est continue :

$$\left(\mu \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{eau} = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{air}$$



Hydrostatique

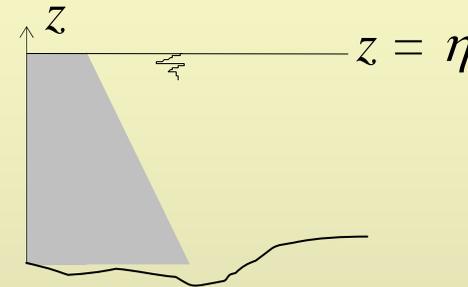


Pression hydrostatique

On considère un fluide au repos ($\underline{u} = \underline{0}$) sous l'effet de la pesanteur :

$$\cancel{\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}} + \cancel{\underline{\text{grad}} \underline{u} \cdot \underline{u}} = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p + \cancel{\nu \Delta \underline{u}} + \underline{g}$$
$$\underline{\text{grad}} p = \rho \underline{g}$$

$$p(z) = p_{atm} + \rho g(\eta - z)$$



- La pression suit un profil *linéaire* (pression hydrostatique)
- L'équation de continuité $\text{div } \underline{u} = 0$ est automatiquement satisfaite
- En toute rigueur, la cote η de la surface libre peut varier

Pression dynamique : $p^* = p + \rho g z = p - p_{hydrostatique} + Cte$

C'est la partie de la pression liée au *mouvement* du fluide.

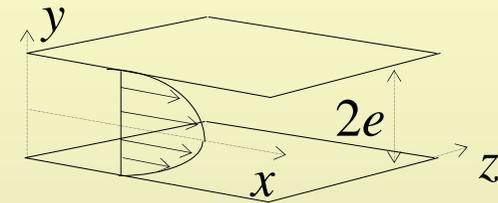
$$-\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p^* = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p + \underline{g}$$

Écoulement de Poiseuille laminaire (1)



Écoulement entre deux plaques fixes « infinies »

- Régime permanent ($\partial / \partial t = 0$)
- Invariance selon z ($\partial / \partial z = 0$)
- Vitesses parallèles aux plaques : $\underline{u} = u \underline{e}_x$



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow u(x, y, z) = u(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$



J.-L. Poiseuille

$$\underbrace{\frac{\partial p^*}{\partial x}}_{F(x)} = \mu \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{G(y)} \Rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial x} = cte$$

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \underbrace{\left[-\frac{\partial p^*}{\partial x} \right]}_{= cte} (e^2 - y^2)$$

Écoulement de Poiseuille laminaire (2)

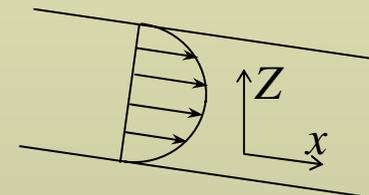


Commentaires

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \underbrace{\left[-\frac{\partial p^*}{\partial x} \right]}_{\text{terme moteur}} (e^2 - y^2)$$

- Le profil des vitesses est parabolique
- Le gradient de pression est le terme *moteur* de l'écoulement, qui se fait des fortes pressions vers les faibles pressions
- La pression est déterminée par ses valeurs en amont et en aval de la « conduite » (conditions aux limites), et varie linéairement
- La pression intervient sous sa forme dynamique (p^*), car l'*inclinaison* de la conduite peut générer un écoulement :

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{dZ}{dx}$$



- L'hypothèse de vitesses *parallèles* aux plaques est la plus contraignante. En réalité, ce profil est souvent *instable* (turbulence)

Merci de votre attention.